

А.Ф. ЗАУСАЕВ, А.А. ЗАУСАЕВ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ
ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ТЕЛ
СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ**



Машиностроение
Москва
2008

УДК 521.182

ББК 22.625

3 12

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор **Обрубов Ю.В.**;

д-р техн. наук, профессор **Рапопорт Э.Я.**

Заусаев А.Ф., Заусаев А.А.

3 12 Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы. – М.: Машиностроение, 2008. – 250 с.

ISBN 978-5-94275-425-9

Монография посвящена вопросам математического моделирования движения малых тел Солнечной системы. Даны основные сведения о задаче эволюции небесных тел. Рассматриваются различные типы дифференциальных уравнений движения. Приводятся основные численные методы, применяемые в небесной механике для решения прикладных задач. Рассматриваются проблемы сходимости, устойчивости, погрешности и эффективности различных численных методов. Исследуются вопросы моделирования эволюции орбит астероидов, представляющих потенциальную опасность для Земли и короткопериодических комет.

Для научных работников, аспирантов, студентов, занимающихся вопросами математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП.2.1.1.1689).

ISBN 978-5-94275-425-9

© А.Ф. Заусаев, А.А. Заусаев, 2008

© Издательство «Машиностроение», 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
Глава 1. Элементы классической небесной механики	14
1.1. Эклиптическая и экваториальная гелиоцентрические системы координат	15
1.2. Эфемеридное, всемирное время и юлианские дни	17
1.3. Алгоритм перехода от юлианских дней к календарной дате и решение обратной задачи	21
1.4. Элементы орбиты и прямоугольные координаты	23
1.5. Вычисление прямоугольных координат и скоростей по элементам орбит	24
1.6. Вычисление элементов орбиты по положению и скорости	29
Глава 2. Численные методы решения задач небесной механики	32
2.1. Основные сведения о проблеме изучения движения небесных тел	32
2.2. Краткий обзор численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений	36
2.2.1. Методы разложения в ряд Тейлора	36
2.2.2. Методы Рунге–Кутты	38
2.2.3. Линейные многошаговые методы	41
2.2.4. Блочные методы	42
2.2.5. Гибридные методы	42
2.2.6. Методы Обрешкова	43
2.2.7. Методы Адамса–Бэшфорта и Адамса–Мултона	43
2.2.8. Методы экстраполяции	56
2.2.8.1. Экстраполяция Ричардсона	56
2.2.8.2. Метод Грэгга–Булирша–Штера	60
Глава 3. Дифференциальные уравнения движения небесных тел	61
3.1. Дифференциальные уравнения движения	61
3.2. Вывод дифференциальных уравнений движения n материальных тел, основанных на новом принципе взаимодействия	64
3.3. Негравитационные эффекты в эволюции короткопериодических комет	71

Глава 4. Численные методы высоких порядков для решения прикладных задач небесной механики	75
4.1. Методы Адамса	75
4.1.1. Явный метод Адамса–Бэшфорта	75
4.1.2. Неявный метод Адамса–Мултона	77
4.2. Форма записи метода Адамса при изменении шага интегрирования	92
4.3. Методы Адамса для уравнений более высокого порядка ...	95
4.4. Метод Коуэлла	96
4.5. Квадратурный метод Коуэлла с переменным шагом интегрирования	104
4.6. Методы тейлоровских разложений в задачах небесной механики	110
4.7. Метод рядов Тейлора–Стеффенсона для планетной задачи. 111	
4.8. Метод тейлоровских разложений для решения задачи n тел с учетом релятивистских эффектов	113
4.9. Метод Эверхарта	117
Глава 5. Сходимость и устойчивость численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений	126
5.1. Интегрируемость и устойчивость в задачах небесной механики	126
5.2. Понятие о сходимости и согласованности численных методов	129
5.3. Нуль-устойчивость	133
5.4. Области абсолютной и относительной устойчивости	138
Глава 6. Оценка погрешности численных методов для задачи Коши	144
6.1. Источники погрешностей	144
6.2. Оценка погрешности методом экстраполяции	148
6.3. Оценка локальной погрешности дискретизации одношаговых методов	149
Глава 7. Введение в теорию жестких задач	152
7.1. Жесткая задача Коши	152
7.2. Устойчивость для жестких задач	153
7.3. Применение неявных методов для решения жестких задач. 157	
Глава 8. Применение численных методов для вычисления высокоточных координат больших планет, Луны и Солнца	160
8.1. Этапы исследования движения больших планет	160
8.2. Анализ эффективности различных численных алгоритмов .	163

Глава 9. Эволюция орбит астероидов групп Аполлона, Амура и Атона	177
9.1. Основные сведения об астероидах групп Аполлона, Амура и Атона	177
9.2. Исследование резонансных движений астероидов групп Аполлона, Амура, Атона с внутренними планетами	178
9.3. Эволюция орбит астероидов групп Аполлона, Амура и Атона, сближающихся с Землей на интервале времени с 1800 по 2004 гг.	190
9.4. О вероятности столкновения астероидов с Землей	195
Глава 10. Эволюция орбит короткопериодических комет	202
10.1 Основные сведения о короткопериодических кометах	202
10.2 Короткопериодические кометы, имеющие тесные сближения с Юпитером	203
10.3. Учет негравитационных эффектов для короткопериодических комет	212
10.4. О природе происхождения короткопериодических комет ..	223
Глава 11. Исследование точности вычислений орбитальной эволюции астероидов групп Аполлона, Амура, Атона и короткопериодических комет	234
Библиографический список	240

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография посвящена вопросам математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе.

В главе 1 изложены основные сведения о системах координат, измерении времени, используемых для решения задач небесной механики.

В главе 2 даются основные сведения о проблеме изучения движения небесных тел. Приведены алгоритмы различных методов, используемых для решения задачи Коши.

В главе 3 рассматриваются дифференциальные уравнения движения небесных тел с учетом гравитационных и релятивистских эффектов. Приводятся дифференциальные уравнения движения n материальных тел, основанные на новом принципе взаимодействия.

В главе 4 приведены основные численные методы, применяемые в небесной механике для решения прикладных задач.

Глава 5 посвящена вопросам сходимости и устойчивости численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В главе 6 рассматриваются источники погрешностей, возникающие при решении задачи Коши.

В главе 7 дается понятие жесткой задачи Коши. Рассматриваются вопросы устойчивости жестких задач, а также методы их решения.

В главе 8 проводится анализ эффективности различных численных алгоритмов, используемых для вычисления высокоточных координат больших планет Луны и Солнца.

Главы 9 и 10 посвящены исследованию эволюции орбит малых тел Солнечной системы. Для астероидов групп Аполлона, Амура, Атона рассмотрены вопросы резонансного движения по отношению к внутренним планетам. На интервале времени с 1800 по 2204 гг. исследована эволюция орбит вышеуказанных групп астероидов и короткопериодических комет.

В главе 11 приведены оценки точности проведенных вычислений.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору В.П. Радченко за большую помощь при подготовке этого издания. Авторы благодарны кандидату физ.-мат. наук Ф.Х. Алтынбаеву, аспиранту В.В. Абрамову, студентам Самарского государственного технического университета С.С. Денисову, А.П. Корневу, О.К. Рыбину, Л.А. Соловьеву за активное участие в проведении расчетов и составлении программного обеспечения для исследования эволюции орбит малых тел Солнечной системы.

ВВЕДЕНИЕ

Создание быстродействующих электронных вычислительных машин привело к бурному развитию математики, а также отдельных ее разделов, которые посвящены методам решения дискретных задач. Важное значение приобрели разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Многие явления в природе в макро- и микромире описываются однотипными дифференциальными уравнениями. При этом в большинстве случаев общее решение этих уравнений не выражается в квадратурах, т.е. уравнения не имеют аналитического решения. Для подобного класса задач возникает необходимость в применении численных методов, дающих приближенное решение. Среди всевозможных методов важную роль играют разностные методы решения задачи Коши. Их существенным достоинством является простая алгоритмизация и реализация на ЭВМ.

В предлагаемой книге основным объектом исследования является эволюция орбит малых тел Солнечной системы (астероидов групп Аполлона, Амура, Атона и короткопериодических комет).

Разработка, исследование, обоснование адекватности математической модели движения небесных тел, в частности, больших планет и малых тел Солнечной системы, а также совершенствование методов, алгоритмов, программного обеспечения для ее реализации важны как для развития численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для получения, накопления, прогнозирования новых знаний в теоретической и прикладной астрономии.

При исследовании эволюции орбит малых тел Солнечной системы точность полученных результатов зависит от ряда факторов, основными из которых являются: учет в математической модели основных действующих сил; точность, устойчивость, сходимость применяемого метода численного интегрирования. Все вышеперечисленные факторы не являются окончательно изученными в настоящее время и требуют дальнейшего развития.

Характерной особенностью современных численных методов, применяемых в небесной механике, является высокий порядок аппроксимирующих формул. Алгоритмы должны обеспечивать получение большого количества верных значащих цифр с целью

уменьшения ошибок округления. Таким образом, разработка методов более высокого порядка, по сравнению с существующими методами, позволяет увеличить точность, эффективность вычислений и расширить интервал интегрирования.

Вследствие того что основным предметом данного исследования является изучение движения малых тел Солнечной системы, приведем краткие сведения о данных объектах.

Солнечная система, наряду с Солнцем, большими планетами и их спутниками, населена различными телами от мельчайших пылинок микронных размеров до тысячекилометровых астероидов. Большая часть из известных астероидов находится в главном поясе, расположенном между орбитами Марса и Юпитера. Самые крупные из них достигают в поперечнике тысячи километров и имеют почти сферическую форму. Астероиды образовались около 4,5 млрд лет назад, в то же время, когда зарождалась Солнечная система.

Орбиты, по которым движутся астероиды, непрерывно меняются вследствие возмущающего действия больших планет, главным образом Юпитера. Возмущающее действие Юпитера способствует их столкновению друг с другом, заставляя астероиды проникать во внутренние области планетной системы, или выбрасывает их за ее пределы. Некоторые из них в результате тесных сближений с Юпитером могут сближаться с планетами земной группы.

Около 98% всех астероидов движутся в кольцевом торе, заключенном в интервале от 2,2 до 3,2 астрономических единиц (а.е.). Эксцентриситеты этих орбит редко превосходят 0,4. Наклоны орбит к плоскости эклиптики составляют от 5 до 15 градусов.

В настоящее время известно свыше пяти тысяч астероидов, проникающих внутрь орбит Марса и Земли. Такие астероиды принято относить к группам: Аполлона ($q < 1$ а.е.), Амура ($1 \text{ а.е.} < q < 1,3 \text{ а.е.}$), Атона ($a < 1$ а.е.), где q – перигелийное расстояние, a – большая полуось.

К астероидам групп Аполлона, Амура, Атона со стороны многих исследователей проявляется повышенный интерес в связи с решением проблемы астероидной опасности.

Теория движения астероидов групп Аполлона, Амура, Атона значительно сложнее теории движения планет, поскольку эллипти-

ческие орбиты данных объектов более вытянуты, нежели орбиты планет, плоскости орбит значительно наклонены к плоскости эклиптики. Кроме того, орбиты астероидов имеют тесные сближения с орбитами больших планет, поэтому аналитические теории движения астероидов не являются точными и для исследования их эволюции широко применяются численные методы.

Следует отметить, что разделение астероидов на группы Аполлона, Амура, Атона является весьма условным, так как астероиды в процессе своей эволюции могут переходить из одной группы в другую. Однако среди астероидов групп Аполлона, Амура, Атона имеется отдельная подгруппа объектов, которые представляют потенциальную опасность столкновения с Землей.

Наряду с астероидами, в Солнечную систему проникают кометы, движение которых, в отличие от астероидов главного пояса, происходит по более вытянутым траекториям.

Кометы на протяжении всей истории исследования небесных объектов привлекали внимание астрономов и других ученых. В частности, история наблюдений кометы Галлея насчитывает более двадцати веков.

При изучении процессов эволюции кометы представляют особый интерес, так как считается, что они являют собой изначальный тип объектов Солнечной системы. Предполагается, что кометы позволяют изучить первичное вещество Солнечной системы в сравнительно неизменном состоянии, поскольку они, в отличие от планет, не подверглись существенным структурным изменениям в результате силы тяжести, тепла и вулканической деятельности. Выдвигаются гипотезы, что ядра комет образовались еще до формирования планет, около 4,6 млрд лет тому назад.

Расчеты, выполненные различными исследователями комет, показывают, что диаметры кометных ядер составляют от нескольких сотен метров до нескольких десятков километров. Среди гипотез относительно состава ядер, наибольшим признанием пользуется гипотеза американского астронома Ф. Уипла [144]. Согласно его теории ядро является конгломератом из тугоплавких каменных частиц и замороженных летучих компонент, среди которых вода, циановодород, углекислый газ, сульфид углерода и др. Ледяные слои из замороженных газов чередуются с пылевыми слоями. При приближении кометы к Солнцу лед под действием солнечного теп-

ла начинает испаряться, а улетающий газ образует вокруг ядра диффузную светящуюся сферу, называемую комой, а также один или несколько хвостов.

Элементы орбит комет претерпевают значительные изменения при сближениях с планетами. Наиболее заметные изменения происходят при сближении кометы с одной из планет-гигантов. Это обстоятельство необходимо учитывать при исследовании вековых изменений элементов орбит как в прошлом, так и в будущем. Данные расчеты позволяют установить, откуда кометные ядра приходят во внутренние области Солнечной системы, а также приблизиться к решению проблемы происхождения кометных тел.

Проблема происхождения комет – одна из нерешенных задач астрономии. В настоящее время наметились пути ее решения. Совместными усилиями таких выдающихся астрономов, как Э.Ю. Эпик, Я.Х. Оорт, Б.Г. Марсден, З. Секанина, Э. Эверхарт, К.А. Штейнс, Е.И. Казимирчак-Полонская была доказана реальность существования на периферии Солнечной системы (на расстоянии 50 000 – 150 000 а.е. от Солнца) неистощимого резервуара кометных ядер, который получил название облака Эпика–Оорта [92]. С открытием за орбитой Нептуна пояса малых тел Уиппла–Койпера появилась возможность предположить существование в нем реликтового резервуара кометных тел Солнечной системы. Предполагая наличие двух подсистем, содержащих кометные тела, путем моделирования соударения комет удается объяснить наличие периодических и непериодических комет в Солнечной системе. Источником поступления непериодических комет считают облако Эпика–Оорта, а периодические кометы, возможно, поступают из пояса Уиппла–Койпера. Для доказательства гипотезы о происхождении комет требуется проведение исследования эволюции их орбит с высокой степенью точности.

В небесной механике вычисление эволюции орбит комет считается одной из самых трудных задач, разрешимой только посредством трудоемкого численного интегрирования. Впервые точные расчеты орбитальной эволюции на длительных интервалах времени были произведены в 60-х годах прошлого столетия Е.И. Казимирчак-Полонской [56 – 58], Б.Г. Марсденом, Н.А. Беляевым [12], Э. Эверхартом. В настоящее время благодаря стремительному развитию средств вычислительной техники количество работ в этой

области существенно возросло. Путем объединения разрозненной информации был создан ряд каталогов кометных орбит.

Первый кометный каталог был составлен Галлеем в 1705 году [121]. Он включил в себя 24 параболические орбиты, и в процессе работы над каталогом была обнаружена первая короткопериодическая комета, впоследствии названная именем Галлея.

В настоящее время наиболее полным и информативным кометным каталогом является каталог Б.Г. Марседена [132]. Он содержит элементы орбит всех известных как периодических, так и непериодических комет на моменты прохождения их через перигелий.

В 1986 г. совместными усилиями Института теоретической астрономии Академии наук СССР (г. Ленинград) и Астрономического института Словацкой Академии наук (г. Братислава) был создан международный каталог короткопериодических комет. Эта работа содержит сведения о процессах и явлениях, воздействующих на орбитальную эволюцию короткопериодических комет. Для всех объектов, наблюдавшихся более чем в одном появлении, интегрирование выполнено для исходных орбит назад до даты 1800 январь 25,0 и вперед до даты 2000 январь 17,0. Вычисление орбитальной эволюции проводилось квадратурным методом Коуэлла с учетом разностей до четвертого порядка. Негравитационные эффекты учтены в 31 случае [13].

Наряду с каталогом Н.А. Беляева, Л. Кресака и др., содержащего энциклопедическую информацию о 81-ой короткопериодической комете, наблюдавшейся более чем в одном появлении, и 47-ми кометах, наблюдавшихся в одном появлении, следует отметить ранее изданные каталоги И. Хасегавы (1968) [122] и А. Карузи (1985) [105].

Более поздний каталог А. Карузи, Л. Кресака и др. [106] содержит информацию об орбитальной эволюции короткопериодических комет на интервале времени 821,4 г. с 1585 (JD=2300000,5) по 2406 (JD=2600000,5) гг. для 109 комет, наблюдавшихся более чем в одном появлении, и 95 комет, наблюдавшихся в одном появлении. Несомненным достоинством данного каталога является использование более современной, по сравнению с ранними исследованиями, теории движения больших планет DE102 при совместном численном интегрировании уравнений движения кометы с учетом

возмущений от планет и Солнца. Кроме того, список исследуемых короткопериодических комет всего за 15 лет пополнился с 81-ой, содержащейся в каталоге Н.А. Беляева, Л. Кресака и др., до 109-ти в каталоге А. Карузи, Л. Кресака и др.

В связи с тем, что список вновь открываемых комет растет, а также появляются новые наблюдения известных комет, возникает потребность в постоянном обновлении каталогов.

В 2005 г. авторами настоящей монографии составлен каталог орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1900 по 2100 гг. [51], содержащий сведения об изменении элементов орбит 164 короткопериодических комет с шагом 10 лет. Во втором издании каталога [52], которое вышло из печати в 2007 г., рассматривается эволюция элементов орбит 190 короткопериодических комет на интервале времени с 1800 по 2204 гг.. В каталогах также приведены данные о тесных сближениях комет с большими планетами, Луной и Солнцем и графики, иллюстрирующие изменение перигелийного расстояния, эксцентриситета, наклона и долготы перигелия.

В 2007 г. издан каталог орбитальной эволюции астероидов, сближающихся с Землей с 1800 по 2204 гг. [48], авторами которого являются А.Ф. Заусаев, В.В. Абрамов, С.С. Денисов. В каталоге приведена информация об эволюции элементов орбит 291 астероида, сближающегося с Землей на расстоянии менее 0,01 а.е. на интервале времени с 1800 по 2204 гг. Для их выявления потребовалось проведение расчета и анализа эволюции орбит 3823 астероидов, принадлежащих группам Аполлона, Амура, Атона на вышеуказанном интервале времени.

Следует отметить, что при создании трех последних каталогов в качестве математической модели, описывающей движение планет, Луны и Солнца, использованы дифференциальные уравнения, в которых наряду с гравитационными эффектами учтены релятивистские эффекты, обусловленные Солнцем и планетами. Для Луны учитывались эффекты от несферичности фигур Луны и Земли, а также приливные эффекты и либрация Луны.

Как показывает всесторонний анализ, проблема астероидной опасности, связанная с прогнозированием столкновения крупных небесных объектов с Землей и предотвращением катастрофических последствий, сложна и далека от окончательного решения.

До января 1978 г. было известно только о 48 астероидах групп Аполлона, Амура, Атона [80]. По состоянию на конец 2008 года их насчитывается свыше 5500. Для успешной работы над решением данной проблемы необходимы комплексные исследования как физических, так и динамических свойств данных объектов. Исследование эволюции орбит астероидов групп Аполлона, Амура, Атона составляет одну из основных задач в решении проблемы астероидной опасности.

В настоящее время вычислены характерные времена существования до столкновения с Землей всех «опасных» космических объектов. Показано, что столкновения небесных тел, подобных Тунгусскому метеориту, с Землей происходят несколько чаще, чем один раз в сто лет. Столкновения, способные вызвать на Земле глобальную катастрофу типа «ядерной зимы», происходят в среднем один раз в несколько сотен тысяч лет. Катастрофы, приводящие к смене геологических эпох, происходят в среднем один раз в несколько десятков миллионов лет [8].

Вопросы о более точных оценках астероидной опасности связаны с нашими знаниями о движении и эволюционных процессах малых тел Солнечной системы, представляющими опасность столкновения с Землей. Изучение движения потенциально «опасных» объектов, каталогизация элементов орбит и тесных сближений с планетами земной группы является важным этапом в решении проблемы астероидной опасности. Регулярные всесторонние исследования потенциально «опасных» объектов позволят предсказать столкновение астероида с Землей и заблаговременно принять соответствующие меры для предотвращения катастрофы.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

При разработке математической модели и программного обеспечения для решения уравнений движения малых тел Солнечной системы наряду с методами решения дифференциальных уравнений используются определенные знания из области теоретической астрономии.

Далее приводятся основные астрономические сведения, такие как понятие измерения времени, описание систем координат, а также формулы связи элементов орбит с координатами и скоростями.

Наблюдения небесных тел производится обычно в системе экваториальных топоцентрических координат – начало координат находится на поверхности Земли в пункте наблюдения. Элементы орбит малых тел Солнечной системы (комет, астероидов) вычисляются в эллиптической гелиоцентрической системе координат. При численном интегрировании уравнений движения, в большинстве случаев, используется экваториальная гелиоцентрическая система координат. Вследствие этого необходимо использовать формулы связи между различными системами координат, вычислять координаты и скорости объекта по известным элементам орбит, решать обратную задачу.

Для того чтобы проследить движение небесного тела, необходимо знать значения его координат в какой-либо системе отсчета на определенные моменты времени.

Подавляющее большинство координатных систем в астрономии являются сферическими и основываются на понятии небесной сферы, в качестве которой выбирается сфера произвольного радиуса (обычно условно принимаемого равным единице) с центром, совпадающим с началом заданной системы отсчета. В соответствии с решаемой задачей используются топоцентрическая, планетоцентрическая и другие небесные сферы. Рассмотрим основные системы координат.

1.1. ЭКЛИПТИЧЕСКАЯ И ЭКВАТОРИАЛЬНАЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Экваториальная система координат. Для данной системы координат в качестве полюса выбирают северный полюс мира (P_n), основным круг системы – небесный экватор. В качестве отсчетной точки фиксируется точка весеннего равноденствия γ . Координаты объекта C – его склонение δ (или полярное расстояние ρ , дополняющее склонение до 90°) и прямое восхождение α (рис. 1.1). В другом часто используемом варианте экваториальной системы второй координатой является часовой угол объекта t – двугранный угол между плоскостью небесного меридиана и плоскостью, в которой находится круг склонений (т.е. большой круг, проходящий через полюс мира и объект). Часовой угол обычно отсчитывается в часовой мере в обе стороны от точки A (от 0 до 12 ч.) [1].

Наряду с полярной системой координат существует также прямоугольная экваториальная система координат. Она представляет собой правую тройку векторов, ось x в которой направлена в точку весеннего равноденствия, а ось z – в северный полюс мира. Прямоугольные и сферические координаты связаны следующими соотношениями [1]:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \cos \alpha, \\ y &= \rho \cos \delta \sin \alpha, \\ z &= \rho \sin \delta, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ – радиус-вектор.

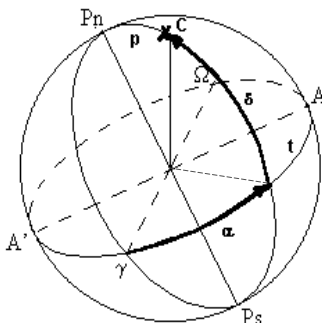


Рис. 1.1. Экваториальная система координат

Эклиптическая система координат, ее связь с экваториальной. В этой системе координат основная плоскость – плоскость эклиптики, основная ось отсчета – прямая, проведенная из начала координат в точку весеннего равноденствия. Начало эклиптической системы координат обычно помещают в центре масс Солнца или в центр массы Земли. Координаты объекта – эклиптическая широта β и эклиптическая долгота λ , отсчитываемая от точки весеннего равноденствия γ . Эклиптическая система удобна при рассмотрении движения тел Солнечной системы.

В эклиптической системе также существует прямоугольная система координат. Гелиоцентрические прямоугольные координаты связаны с эклиптическими сферическими координатами формулами:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \lambda \cos \beta, \\y &= r \cos \lambda \sin \beta, \\z &= r \sin \beta,\end{aligned}\tag{1.2}$$

где r – радиус-вектор.

Переход от экваториальной прямоугольной системы координат $x'y'z'$ к эклиптической xuz происходит по следующим формулам поворота на угол ε :

$$\begin{aligned}x &= x', \\y &= y' \cos \varepsilon + z' \sin \varepsilon, \\z &= z' \cos \varepsilon - y' \sin \varepsilon,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где ε – угол между плоскостями эклиптики и экватора.

Для обратного перехода существуют следующие формулы:

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon, \\z' &= z \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Вторым основным требованием после выбора системы координат, как уже отмечалось выше, является определение времени. Практические наблюдения, как правило, представляют данные во всемирном времени. Однако при построении математических моделей движения небесных объектов удобно пользоваться непрерывной шкалой времяисчисления – юлианскими днями.

1.2. ЭФЕМЕРИДНОЕ, ВСЕМИРНОЕ ВРЕМЯ И ЮЛИАНСКИЕ ДНИ

Для измерения времени необходима эталонная единица. Для ее получения использовались следующие периодические процессы: вращение Земли вокруг своей оси; вращение Земли вокруг Солнца; излучение (поглощение) электромагнитных волн атомами или молекулами некоторых веществ при определенных внешних условиях.

Промежуток времени, в течение которого Земля делает один оборот вокруг своей оси относительно какого-нибудь ориентира на небе, называется сутками. Продолжительность суток будет различной в зависимости от того, какой ориентир используется в качестве точки отсчета. Для этих целей служат: точка весеннего равноденствия; центр видимого диска Солнца; среднее Солнце – фиктивная точка, равномерно движущаяся по экватору со средней за год скоростью движения истинного Солнца по эклиптике.

Определяемые таким образом три разных промежутка времени называются соответственно звездными, истинными и средними солнечными сутками.

Истинные солнечные сутки неодинаковы в течение года в силу двух причин:

- 1) истинное Солнце, отражая вращение Земли по эллиптической орбите, движется по эклиптике неравномерно;
- 2) наклон эклиптики к экватору приводит к тому, что проекции одинаковых отрезков эклиптики на экватор не равномерны между собой, и, следовательно, часовой угол Солнца, отсчитываемый по экватору, изменяется неравномерно.

Поэтому для измерения времени стали использовать средние солнечные сутки. Местное среднее солнечное время на меридиане Гринвича (Великобритания) было названо Всемирным временем и обозначено *UT* (от английского Universal Time).

Разность между средним и истинным солнечным временем называется уравнением времени [89]. Четыре раза в году уравнение времени бывает равным нулю, а его максимальное и минимальное значения равны примерно ± 15 мин (рис. 1.2).

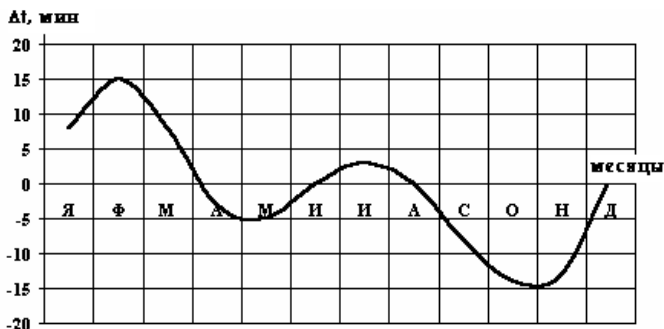


Рис.1.2. Уравнение времени

Недостатком солнечного времени является трудность его определения из астрономических наблюдений. Солнце имеет большой видимый диск, что затрудняет отсчет положения его центра.

Использовать звездное время непосредственно в повседневной жизни неудобно, так как вследствие годового движения Земли по орбите звездные сутки короче среднесолнечных на Земле на 3 мин. 56 с. Звездное время и среднесолнечное время быстро расходятся.

Движение земных меридианов Земли смещает земные меридианы, на которых ведутся наблюдения, и приводит к тому, что шкала UT_0 , получаемая в различных точках Земли, оказывается неодинаковой. Поэтому для получения более однородной шкалы времени, называемой UT_1 , в наблюдениях отдельных служб времени вводятся поправки $\Delta\lambda$ на движение полюса так, что

$$UT_1 = UT_0 + \Delta\lambda . \quad (1.5)$$

Неравномерность вращения Земли подразделяется на три вида.

Вековое замедление скорости вращения Земли, изменяющее продолжительность суток примерно на 0,002 сек. за столетие. Эта величина настолько мала, что обычно не принимается во внимание.

Сезонная (обусловлена в основном сезонной циркуляцией атмосферы) неравномерность вращения Земли, изменяющая продолжительность суток от их среднего за год значения на величину, немного меньшую $\pm 0,001$ с. Учет сезонной неравномерности дает новую шкалу:

$$UT_2 = UT_1 + \Delta T_{сезон} . \quad (1.6)$$

Нерегулярные изменения скорости (является результатом действия различных факторов, в частности, нестационарных процессов внутри Земли), из-за которых продолжительность суток изменяется на величину $\approx 10^{-3}$ с на интервале от нескольких лет до нескольких месяцев. Эти изменения не могут быть прогнозированы заранее и почти целиком входят в $UT2$.

Учет флуктуации и скорости вращения Земли производится путем сравнения теоретических вычислений (эфемеридных) координат небесных тел с их координатами, полученными из наблюдений. Найденные поправки ΔTe дают возможность ввести шкалу эфемеридного времени:

$$TE = UT2 + \Delta Te, \quad (1.7)$$

являющейся наиболее равномерной астрономической шкалой времени, получаемой из наблюдений. Время, отсчитываемое по этой шкале, называется эфемеридным. Его не следует путать с равномерным эфемеридным временем – математическим понятием, употребляемым в формулах небесной механики. Точность определения эфемеридного времени по отдельным наблюдениям из-за случайных ошибок меньше, чем точность определения $UT2$, поэтому поправку ΔTe вычисляют как среднюю по большому ряду наблюдений, обычно за год или за полгода.

Таким образом, точные значения TE могут быть получены лишь по экстраполяции назад. Экстраполяция TE вперед не может быть эффективной.

Если до открытия неравномерности вращения Земли основная единица времени – секунда определялась как $1/86400$ доля средних солнечных суток, то с введением эфемеридного времени в качестве его единицы была принята эфемеридная секунда. В 1956 г. Международное бюро мер и весов дало следующее определение секунды: «Секунда – есть $1/31556925,9747$ доля тропического года для 1900 г. январь 0, в 12 ч эфемеридного времени».

Наряду с общепринятой календарной системой счета суток широкое применение в астрономии нашла система сплошного счета суток без подразделения на месяцы и годы, предложенная в XVI в. Скалигером [89] и названная им юлианской (или юлианским периодом). Юлианский период начинается в средний гринический

полдень 1 января 4713 г. до н.э. – произвольно выбранный, но столь далекий момент, что все исторические даты были после него.

При помощи юлианского периода решаются часто встречающиеся в астрономии задачи о числе d суток, прошедших между двумя заданными датами t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$).

Для этого по таблицам дней юлианского периода находят юлианские даты $JD(t_1)$ и $JD(t_2)$, соответствующие заданным календарным датам t_1 и t_2 , и вычитают более раннюю юлианскую дату $JD(t_1)$ из $JD(t_2)$:

$$d = JD(t_2) - JD(t_1). \quad (1.8)$$

При этом необходимо иметь в виду, что юлианские даты сохранили свое начало по старому астрономическому счету в гринический полдень и после 1925 г., поэтому юлианская дата, соответствующая некоторому моменту определенной календарной даты, будет выражена номером юлианского дня, соответствующему гриническому полдню этой календарной даты с долей суток, протекших после этого полдня. Например, моменту времени (дате) $t = 1970$ май 5,725, UT соответствует юлианская дата $JD\ 2440712,255$.

В зависимости от системы измерения времени юлианский день может относиться как к моментам всемирного времени UT , так и моментам эфемеридного времени ET . В последнем случае юлианская эфемеридная дата JED отличается от юлианской даты JD , выраженной в системе всемирного времени UT , на величину ΔT – поправку на эфемеридное время.

Юлианский эфемеридный день в этом случае представляет число эфемеридных суток, прошедших от даты – 4712, январь 1, 12^h до $12^h ET$ времени заданной календарной даты.

Фундаментальной эпохе ньютонских планетных теорий 1900, январь 0, $12^h ET$ соответствует юлианская эфемеридная дата $JED\ 2415020,0$.

В дифференциальных уравнениях небесной механики пользуются именно этим ньютонским или эфемеридным временем, так как эфемериды небесных тел (т.е. их положения на небесной сфере для ряда моментов), полученные на основе решения дифференциальных уравнений небесной механики, естественно, даются в астрономических ежегодниках по ньютонскому времени.

Таким образом, в небесной механике широкое применение получила непрерывная шкала отсчета времени. Однако в повседневной жизни все наблюдения относятся, как правило, к обычной календарной дате. Поэтому возникает необходимость в алгоритмах, позволяющих осуществлять переход от календарной даты к юлианским дням, а также в алгоритмах решения обратной задачи.

1.3. АЛГОРИТМ ПЕРЕХОДА ОТ ЮЛИАНСКИХ ДНЕЙ К КАЛЕНДАРНОЙ ДАТЕ И РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Приведенный ниже алгоритм вычисления юлианских дней учитывает григорианскую реформу календаря, в соответствии с которой за 4 октября 1582 г. сразу следует 15 октября. В нем также учтено, что перед 1 годом н.э. был нулевой год, а перед ним – 1 и т.д. [63, 64].

Пусть YY – номер года, MM – номер месяца и DD – число. Если MM больше 2, возьмем

$$y = YYYY \text{ и } m = MM, \quad (1.9)$$

в противном случае возьмем

$$y = YYYY - 1 \text{ и } m = MM + 12. \quad (1.10)$$

Если заданная дата наступает позже 14 октября 1582 г. по григорианскому календарю, то, введя функцию $\text{int}(\cdot)$, выделяющую целую часть числа, найдем

$$A = \text{int}\left(\frac{y}{100}\right), \quad B = 2 - A + \text{int}\left(\frac{A}{4}\right), \quad (1.11)$$

иначе

$$A = 0, \quad B = 0. \quad (1.12)$$

Искомая юлианская дата равна

$$JD = \text{int}(365,26 \cdot y) + \text{int}(30,6001 \cdot (m + 1)) + DD + B + 1720994,5. \quad (1.13)$$

Обратный переход от юлианских дат осуществляется несколько сложнее. Предлагаемый метод применим только для положительных номеров юлианских дней.

Пусть JD – заданная юлианская дата. Последовательно вычислим

$$j = JD = 0,5, \quad Z = \text{int}(j), \quad F = \text{frac}(j), \quad (1.14)$$

где $\text{frac}(\cdot)$ – функция, выделяющая дробную часть числа.

Если $Z < 2299161$, то положим

$$A = Z, \quad (1.15)$$

если $Z \geq 2299161$, то вычислим

$$a = \text{int}\left(\frac{Z - 1867216,25}{36524,25}\right),$$

$$A = Z + 1 + a - \text{int}\left(\frac{a}{4}\right). \quad (1.16)$$

Затем находим

$$B = A + 1524,$$

$$C = \text{int}\left(\frac{B - 122,1}{365,25}\right), \quad (1.17)$$

$$D = \text{int}(365,25 \cdot C),$$

$$E = \text{int}\left(\frac{B - D}{30,6001}\right).$$

День месяца с десятичными знаками равен

$$DD = B - D - \text{int}(30,6001 \cdot E) + F. \quad (1.18)$$

Если $E < 13,5$, то номер месяца равен

$$MM = E - 1, \quad (1.19)$$

при $E > 13,5$ —

$$MM = E - 13. \quad (1.20)$$

Номер года при $MM > 2,5$ равен

$$YY = C - 4716, \quad (1.21)$$

при $MM < 2,5$ —

$$YY = C - 4715. \quad (1.22)$$

Таким образом, мы имеем алгоритмы перехода от юлианского дня к календарной дате и решения обратной задачи.

Положение тела в задачах небесной механики и их движение на определенные моменты времени задаются либо в прямоугольных координатах, либо в элементах орбит.

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ И ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Элементы орбиты – величины, характеризующие положение орбиты в пространстве, ее размеры и форму, а также положение небесного тела на орбите.

В случае движения больших планет за основную плоскость чаще всего принимают плоскость эклиптики, а за основную точку – точку весеннего равноденствия. В этом случае элементы орбит называются эклиптическими.

Предположим, что плоскость орбиты пересекает небесную сферу по большому кругу NAM (рис. 1.3), а радиус-вектор до перигелия пересекает небесную сферу в точке A . Тогда прямая NON' называется линией узлов. Угол Ω , называется долготой восходящего узла. Угол i , под которым плоскость орбиты пересекает основную плоскость, называется наклонением. Угол, обозначаемый ω , называется аргументом перигелия.

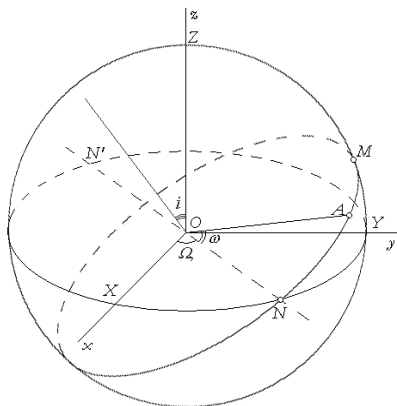


Рис. 1.3. Элементы орбиты

Величины Ω , i и ω составляют первую группу элементов орбиты: первые два из них характеризуют положение плоскости орбиты, а третий – ориентацию орбиты в этой плоскости.

Элементы второй группы характеризуют размеры и форму орбиты – эксцентриситет e и большую полуось a или параметр орбиты p , которые связаны формулой

$$p = a(1 - e^2). \quad (1.23)$$

Последним, шестым элементом является M – средняя аномалия, либо τ – момент прохождения через перигелий.

Элементы орбиты дают более наглядное представление о положении и эволюции орбиты исследуемого тела в определенный момент времени. Для того чтобы иметь возможность использовать приведенные в справочниках значения элементов орбит в качестве начальных данных для решения небесно-механических задач, а также производить сравнение полученных результатов с результатами таблиц, необходимо уметь вычислять прямоугольные координаты и скорости по известным элементам орбит и знать алгоритмы обратного перехода.

1.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ И СКОРОСТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАМ ОРБИТ

При эллиптическом движении для вычисления прямоугольных координат x , y , z по элементам орбит могут служить следующие формулы:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (1.24)$$

$$E - e \sin E = M, \quad (1.25)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (1.26)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad (1.27)$$

$$u = \nu + \omega, \quad (1.28)$$

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i. \end{cases} \quad (1.29)$$

Здесь M – средняя аномалия; $n = \sqrt{\mu/a^3}$, $\mu = k^2$, где k – постоянная Гаусса; t_0 – начальный момент времени (эпоха), M_0 – средняя аномалия в эпоху, E – эксцентрическая аномалия, v – истинная аномалия, u – аргумент широты.

Радиус-вектор r и прямоугольные координаты x , y , z можно также вычислять и по другим формулам, не требующим знания истинной аномалии v . Эти формулы имеют вид:

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (1.30)$$

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e), \\ \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\begin{cases} x = P_x \xi + Q_x \eta, \\ y = P_y \xi + Q_y \eta, \\ z = P_z \xi + Q_z \eta. \end{cases} \quad (1.32)$$

Здесь ξ и η – орбитальные координаты, а направляющие косинусы P_x , P_y , ..., Q_z определяются через элементы Ω , ω и i следующим образом:

$$\begin{cases} P_x = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z = \sin \omega \sin i, \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\begin{cases} Q_x = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y = -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z = \cos \omega \sin i. \end{cases} \quad (1.34)$$

Для контроля вычислений используют равенства

$$\begin{cases} P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1, \\ Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1, \\ P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Пусть V – скорость, V_r – радиальная скорость, V_n – трансверсальная скорость. Тогда

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (1.36)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu, \quad (1.37)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu). \quad (1.38)$$

Дифференцируя по времени формулы (1.29), найдем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} = \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} = \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_n. \end{cases} \quad (1.39)$$

Эти формулы позволяют вычислить проекции скорости на оси координат. Для вычисления V имеем формулу

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (1.40)$$

которую можно использовать для контроля.

Реже встречаются гиперболические и параболические виды движения небесных объектов.

Для вычисления прямоугольных координат x , y , z при гиперболическом движении могут служить следующие формулы:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (1.41)$$

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \quad (1.42)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}, \quad (1.43)$$

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \nu}, \quad (1.44)$$

$$u = \nu + \omega, \quad (1.45)$$

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i. \end{cases} \quad (1.46)$$

Радиус-вектор r и прямоугольные координаты x , y , z можно также вычислить и по другим формулам:

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1), \quad (1.47)$$

$$\begin{cases} \xi = a \cdot (e - \operatorname{ch} E), \\ \eta = a \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \end{cases} \quad (1.48)$$

$$\begin{cases} x = P_x \xi + Q_x \eta, \\ y = P_y \xi + Q_y \eta, \\ z = P_z \xi + Q_z \eta, \end{cases} \quad (1.49)$$

не требующим знания истинной аномалии v . Здесь ξ и η – орбитальные координаты, а направляющие косинусы P_x, P_y, \dots, Q_z определяются по формулам (1.33) и (1.34).

Для вычисления проекций скорости на координатные оси можно воспользоваться формулами (1.37) – (1.39). Скорость V находится из формулы (1.40), при этом для контроля можно пользоваться интегралом энергии:

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (1.50)$$

При параболическом движении для вычисления прямоугольных координат x , y , z могут служить следующие формулы:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}, \quad (1.51)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = n(t - \tau), \quad (1.52)$$

$$r = q \sec^2 \frac{v}{2}, \quad (1.53)$$

$$u = v + \omega, \quad (1.54)$$

$$\begin{cases} x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z = r \sin u \sin i, \end{cases} \quad (1.55)$$

здесь $q = p/2$.

Кубическое уравнение (1.52), называемое иногда уравнением Баркера, всегда имеет единственный действительный корень [1].

Вместо (1.52) – (1.55) можно воспользоваться следующими формулами:

$$\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = n(t - \tau), \quad (1.56)$$

$$r = q(1 + \sigma^2), \quad (1.57)$$

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad n = 2q\sigma, \quad (1.58)$$

$$\begin{cases} x = P_x \xi + Q_x \eta, \\ y = P_y \xi + Q_y \eta, \\ z = P_z \xi + Q_z \eta, \end{cases} \quad (1.59)$$

где ξ и η – орбитальные координаты, $\sigma = tg \frac{v}{2}$, а P_x, P_y, \dots, Q_z определяются по формулам (1.33) и (1.34).

Для вычисления проекций скорости на координатные оси можно воспользоваться формулами (1.37) – (1.39).

Для вычисления скорости V могут служить формулы:

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V_r^2 + V_n^2, \quad (1.60)$$

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}.$$

Последней формулой следует воспользоваться для контроля.

Для решения обратной задачи и получения элементов орбит по известным координатам можно воспользоваться нижеследующим алгоритмом вычисления элементов орбиты по положению и скорости.

1.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПО ПОЛОЖЕНИЮ И СКОРОСТИ

Пусть известны в начальный момент t_0 прямоугольные экваториальные координаты x_0, y_0, z_0 и компоненты скорости $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ небесного тела. Изложим алгоритм вычисления элементов невозмущенной орбиты, соответствующих этим значениям [1].

Вычисляется величина

$$\frac{1}{a} = \left| \frac{2}{r_0} - \frac{V_0^2}{k^2} \right|, \quad (1.61)$$

где

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2. \quad (1.62)$$

Положительному значению выражения, стоящего в (1.61) под знаком модуля, соответствует эллиптическая, отрицательному – гиперболическая и нулевому значению – параболическая орбиты.

В случае эллиптической орбиты вычисляются эксцентриситет e и эксцентрическая аномалия E_0 на момент t_0 из соотношений

$$e \sin E_0 = \frac{r_0 \dot{r}_0}{k \sqrt{a}}, \quad e \cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a}, \quad (1.63)$$

где $r_0 \dot{r}_0 = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0$.

Затем с помощью уравнения Кеплера

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0 \quad (1.64)$$

вычисляется средняя аномалия в эпоху t_0 .

В случае гиперболической орбиты формулы для вычисления эксцентриситета, аналога эксцентрической аномалии H_0 , и момента τ прохождения через перигелий следующие:

$$e \operatorname{sh} H_0 = \frac{r_0 \dot{r}_0}{k \sqrt{a}}, \quad e \operatorname{ch} H_0 = \frac{r}{a} + 1, \quad (1.65)$$

$$e \operatorname{sh} H_0 - H_0 = ka^{-\frac{3}{2}}(t_0 - \tau). \quad (1.66)$$

В случае параболической орбиты достаточно вычислить параметр орбиты p и момент τ прохождения через перигелий. Формулы для вычислений будут иметь следующий вид:

$$p = 2r_0 - \frac{(r_0 \dot{r}_0)^2}{k^2}, \quad \tau = t_0 - \frac{1}{2k} p^{\frac{3}{2}} \left(\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 \right), \quad (1.67)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{r_0 \dot{r}_0}{k\sqrt{p}}, \quad r_0 \dot{r}_0 = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0. \quad (1.68)$$

Из соотношений

$$\begin{cases} k\sqrt{p} \sin i' \sin \Omega' = y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ k\sqrt{p} \sin i' \cos \Omega' = x_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{x}_0, \\ k\sqrt{p} \cos i' = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0 \end{cases} \quad (1.69)$$

находятся элементы i' и Ω' , отнесенные к экватору, а также параметр p . В случае параболической орбиты это значение p должно совпадать с тем, которое находится согласно (1.67). В случае эллиптической или гиперболической орбит следует для контроля проверить соотношения

$$p = a(1 - e^2), \quad p = a(e^2 - 1), \quad (1.70)$$

используя найденные значения a и e .

Экваториальный элемент ω' находится по формулам

$$\operatorname{tg} \nu_0 = \frac{\sqrt{p} r_0 \dot{r}_0}{k(p - r_0)}, \dots, \quad \operatorname{tg} u'_0 = \frac{z_0 \operatorname{cosec} i'}{x_0 \cos \Omega' + y_0 \sin \Omega'}, \quad \omega' = u'_0 - \nu'_0, \quad (1.71)$$

причем числители и знаменатели выписанных формул имеют знаки синуса и косинуса углов ν_0 , u'_0 соответственно.

Переход к эклиптическим элементам выполняется по следующим формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin i \sin \Omega = \sin i' \sin \Omega', \\ \sin i \cos \Omega = -\cos i' \sin \varepsilon + \sin i' \cos \varepsilon \cos \Omega', \\ \cos i = \cos i' \cos \varepsilon + \sin i' \sin \varepsilon \cos \Omega', \\ \sin i \sin d = \sin \varepsilon \sin \Omega', \\ \sin i \cos d = \sin i' \cos \varepsilon - \cos i' \sin \varepsilon \cos \Omega', \\ \omega = \omega' - d. \end{array} \right. \quad (1.72)$$

Все вышеперечисленные алгоритмы являются вспомогательным инструментом при решении основной задачи – задачи построения математической модели движения малых тел Солнечной системы.