А.Ф. ЗАУСАЕВ, М.А. РОМАНЮК

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Самара
Самарский государственный технический университет
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а «Прикладная математика и информатика»

А.Ф. ЗАУСАЕВ, М.А. РОМАНЮК

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Самара
Самарский государственный технический университет
2017

Печатается по решению редакционно-издательского совета СAмГТУ

УДК 521:517.91
ББК 22.6:22.1
З 37

Заусаев А.Ф.
З 37 **Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе:** монография / *А.Ф. Заусаев, М.А. Романюк*. Под ред. *В.П. Радченко*. – Самара.: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 265 с.

ISBN 978-5-7964-1988-5

Посвящена математическому моделированию движения небесных тел в Солнечной системе. Излагается новый взгляд на вопрос, связанный с тяготением. Тяготение рассматривается с точки зрения взаимодействия окружающего пространства с движущимися материальными телами. Получены дифференциальные уравнения движения n тел в барицентрической системе координат. Показано, что в дифференциальных уравнениях движения небесных тел нет необходимости учитывать релятивистские эффекты и сжатие фигуры Земли при интегрировании уравнений движения Меркурия и Луны. На интервале времени 600 лет (1600–2200 гг.) проведены исследования движения больших планет, Луны и Солнца. Полученные результаты сопоставлены с банком данных DE405. Показано, что результаты, полученные путем решения данных уравнений, превосходят по точности результаты, полученные с помощью классических – ньютоновых и релятивистских уравнений движения. На примере конкретных астероидов групп Аполлона и Атона и короткопериодических комет Галлея, Энке и Фая исследована эволюция орбит с учетом негравитационных эффектов.

Предназначена для научных работников, аспирантов, студентов, занимающихся вопросами математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе.

Р е ц е н з е н т ы : д-р физ.-мат. наук, профессор *Обрубов Ю.В.;*
д-р физ.-мат. наук, профессор *Жданов А.И.*

ISBN 978-5-7964-1988-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография посвящена математическому моделированию движения небесных тел в Солнечной системе.

В главе 1 изложен вывод дифференциальных уравнений движения материальных тел, основанных на новом принципе взаимодействия.

В главе 2 получены дифференциальные уравнения относительного движения, основанные на новом принципе взаимодействия.

В главе 3 рассматриваются численные методы высоких порядков для решения прикладных задач небесной механики

В главе 4 рассмотрены вопросы сходимости и устойчивости численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Глава 5 посвящена созданию банка данных координат небесных тел (Меркурий – Плутон) и Луны на основе современной численной теории DE405.

Глава 6 посвящена математическому моделированию движения больших планет, Луны и Солнца на основе нового принципа взаимодействия.

Глава 7 посвящена математическому моделированию движения астероидов групп Аполлона и Атона, сближающихся с Землей.

Глава 8 посвящена математическому моделированию движения комет Галлея, Энке и Фая.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные со строением окружающего нас мира, обсуждались ещё со времён древнегреческих и древнеримских философов, таких как Левкипп (500 г. до н. э.), Демокрит (460–370 гг. до н. э.), Эпикур (341–270 гг. до н. э.), Лукреций (99–55 гг. до н. э.) и их последователи. Они предполагали, что всё существующее – атомы и пустота между ними, причём без вакуума не было бы и движения, атомы не могли бы двигаться, если бы между ними не было пустого пространства. Аристотель (384–322 гг. до н. э.) и ряд других философов, напротив, считали, что «природа не терпит пустоты». По их представлению, все пространство заполнено эфиром, обладающим способностью к вечному круговороту.

Подробно разработанная гипотеза о существовании физического эфира была выдвинута в 1618 году Рене Декартом и впервые изложена в труде «Мир, или трактат о свете» (1634). Декарт отрицал пустоту и считал, что всё пространство заполнено эфиром. С XVI по XIX века различные теории использовали эфир для описания гравитационных явлений. Наиболее известна теория гравитации Лесажа, другие модели были предложены Исааком Ньютоном, Бернхардом Риманом и Лордом Кельвином [13]. Развитие идей об эфирной природе тяготения принадлежит современнику Ньютона Р. Гуку [13]. Согласно его представлению, колебания атомов материального тела передаются эфиру, распространяются в последнем и, достигая других тел, вызывают их притяжение к данному телу.

Важным событием в теории тяготения являлось открытие И. Ньютоном Закона всемирного тяготения. Закон всемирного тяготения гласит, что взаимное гравитационное притяжение двух масс M и m по величине равно

$$k^2 \frac{Mm}{r^2}.$$

Здесь r – расстояние между массами, рассматриваемыми как точки, k^2 – универсальная постоянная тяготения.

На его основе была создана небесная механика, которая всегда являлась образцовым примером научного достижения в прогнозировании движения небесных тел с высокой степенью точности. Как и любая наука, например геометрия, небесная механика основывается на ряде основополагающих аксиом. В основе классической небесной механики лежит закон всемирного тяготения Ньютона и три закона (аксиомы) движения.

Сформулируем основные определения и законы движения механики, сохранив историческую формулировку [32].

«Закон I. Всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Закон II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Закон III. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны».

Входящим в закон всемирного тяготения и в три закона движения величинам Ньютоном были даны следующие определения:

«Определение I. Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объема тела».

«Определение II. Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе».

«Определение III. Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

«Определение IV. Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

За определениями у Ньютона следует пояснение понятий времени и пространства.

«I. Абсолютное, истинное, математическое время само по себе и по самой сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.

Относительное, кажущееся или обыкновенное время есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени как-то: час, день месяц, год».

«Абсолютное время различается в Астрономии от обыденного солнечного времени уравнением времени».

«II. Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным.

Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами и по положению его относительно некоторых тел, и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное».

«III. Место есть часть пространства, занимаемая телом, и по отношению к пространству бывает или абсолютным, или относительным».

«IV. Абсолютное движение есть перемещение тела из одного его места в другое, относительное – из относительного в относительное же».

Закон всемирного тяготения Ньютона, лежащий в основе небесной механики, не связан с каким-либо конкретным представлением о природе или механизме взаимного притяжения между телами. Во втором издании «Начал» Ньютон отмечает: «До сих пор я изъяснял небесные явления и приливы наших морей на основе силы тяготения, но я не указал причины самого тяготения. Эта сила происходит от некоторой причины, которая проникает до центра Солнца и планет без уменьшения своей способности и которая действует не пропорционально поверхности частиц, на которые она действует (как обычно это имеет место для механических причин), но пропорционально количеству твердого вещества, причем ее действие распространяется повсюду на огромные расстояния, убывая пропорционально квадратам расстояний. Причину этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам, и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря» [64] .

По-видимому, нельзя считать, что Ньютон довольствовался эмпирическим обоснованием закона тяготения. Он неоднократно указывал на возможность механического объяснения гравитации с помощью гипотезы об эфире, хотя это объяснение не казалось ему убедительным. Вместе с тем он отрицал идею о первичности гравитации, согласно которой тяготение представляет собой неотъемлемое свойство самой материи, которое проявляется в ее способности действовать на сколь угодно больших расстояниях. Рассуждая о природе и сущности гравитации, Ньютон писал: «Непостижимо, чтобы неодушевленная, грубая материя могла без посредства чего-либо нематериального действовать и влиять на другую материю без взаимного соприкосновения, как это должно бы происходить, если бы тяготение в смысле Эпикура было существенным и врожденным в материи. Предполагать, что тяготение является существенным, неразрывным и врожденным свойством материи, так что тело может действовать на любом расстоянии в пустом пространстве, без посредства чего-либо, передавая действие и силу, – это, по-моему, такой абсурд, который не мыслим ни для кого, умеющего достаточно разбираться в философских предметах. Тяготение должно вызываться агентом, постоянно действующим по определенным законам» [64].

Возникает естественный вопрос, являются ли законы движения физически обоснованными? Под физическим законом понимается эмпирически установленная и выраженная в строгой словесной и/или математической формулировке устойчивая связь между повторяющимися явлениями, и состояниями тел и других материальных объектов в окружающем мире.

Подлежат ли законы движения эмпирической проверке?

Серьезной критике законы движения механики подверг французский математик А. Пуанкаре. Рассуждая о законе ускорения, он пишет: «Ускорение тела равно действующей на него силе, деленной на его массу.

Можно ли проверить на опыте этот закон? Для этого нужно было бы измерить три величины, входящие в его выражение: ускорение, силу и массу.

Отвлекаясь от трудности, связанной с измерением времени, допустим, что возможно измерить ускорение. Но как измерить силу или массу? Мы не знаем даже, что это такое.

Что такое масса? Это, отвечает Ньютон, произведение объема на плотность. Лучше сказать, возражают Томсон и Тэт, что плотность есть частное от деления массы на объем. Что такое сила? Это, отвечает Лагранж, причина, производящая или стремящаяся произвести движение тела. Это, скажет Кирхгоф, произведение массы на ускорение. Но тогда почему не сказать, что масса есть частное от деления силы на ускорение.

Эти трудности непреодолимы. Определив силу как причину движения, мы становимся на почву метафизики, и если бы таким определением пришлось удовлетвориться, оно было бы абсолютно бесплодно. Чтобы определение могло быть к чему-нибудь пригодно, оно должно научить нас измерению силы; к тому же этого условия и достаточно; нет никакой необходимости, чтобы определение научило нас тому, что такое сила сама по себе, или тому, есть ли она причина или следствие движения» [68].

В начале 1850 г. Французским ученым Леверье была построена теория движения Солнца и семи больших планет (Меркурий – Нептун) относительно Земли. Результатом его труда явилось доказательство невозможности представления наблюдений прохождения Меркурия по диску Солнца на основе ньютоновой динамики любой системой оскулирующих элементов и масс известных ему планет [70, 99].

В конце XIX столетия Ньюком и Тиссеран пришли к выводу о существовании трех основных расхождений ньютоновой теории с астрономическими наблюдениями. Эти отклонения для векового движения перигелия Меркурия составляли 41–43 (секунды дуги), для Венеры 10 секунд и для Марса – 8 секунд [13, 76].

Наряду с установленными эмпирическими трудностями стали все более выявляться и обсуждаться трудности, связанные с феноменологическим характером ньютоновской теории. Различные затруднения вызывали у ученых сомнения в точности закона Ньютона, и делались многочисленные попытки внести поправки в точную формулу закона тяготения. Однако эти попытки улучшения закона всемирного тяготения оставались безуспешными. Самым существенным недостатком небесной механики Ньютона являлся принцип дальнодействия, допускающий возможность непосредственного действия данного тела на сколь угодно большом расстоянии без посредства промежуточной среды. Гравитации приписывается бесконечно большая скорость распространения, что противоречит основным представлениям современной физики.

Отказ от принципа дальнодействия, считавшегося слабой стороной небесной механики Ньютона, предпринимался неоднократно. Наиболее глубокие исследования в этом направлении были проведены Лапласом и Пуанкаре [13, 18]. Однако проведенные ими исследования не привели к положительным результатам. В первом случае возникали неоправданно большие изменения большой полуоси небесных тел, не согласующиеся с наблюдениями, на что было указано Лапласом. Во втором случае, хотя теория Пуанкаре позволяет устранить дальнодействие и согласовать закон тяготения с принципами СТО (Специальная теория относительности), она не является более точной и удобной с точки зрения практического применения по сравнению с механикой Ньютона.

Гипотеза Герца о полном увлечении эфира движущимися телами привела к теории неподвижного всепроникающего эфира. Однако опыт Майкельсона показал отсутствие движения Земли относительно эфира, что явилось поводом для отказа от эфира, как носителя электромагнитных волн. Однако Эйнштейн указывал, что теория относительности не требует безусловного отрицания существования эфира. Если не приписывать эфиру определенных механических свойств, его можно продолжать считать существующим, отождествив с пространством.

Лауреат Нобелевской премии по физике Роберт Б. Лафлин так сказал о роли эфира в современной теоретической физике: «Как это ни парадоксально, но в самой креативной работе Эйнштейна (общей теории относительности) существует необходимость в пространстве как среде, тогда как в его исходной предпосылке (специальной теории относительности) необходимости в такой среде нет… Слово «эфир» имеет чрезвычайно негативный оттенок в теоретической физике из-за его прошлой ассоциации с оппозицией теории относительности. Это печально, потому что оно довольно точно отражает, как большинство физиков на самом деле думают, о вакууме… Теория относительности на самом деле ничего не говорит о существовании или не существовании материи, пронизывающей вселенную. Но мы не говорим об этом, потому что это табу».

Понятие «физический вакуум» появилось в науке как следствие осознания того, что вакуум не есть пустота, не есть «ничто». Физический вакуум стал предметом изучения физики благодаря усилиям известных ученых: П. Дирака, Р. Фейнмана, Дж. Уилера, У. Лэмба, де Ситтера, Г. Казимира, Г.И. Наана, Я.Б. Зельдовича [25, 53, 79, 91]. Под физическим вакуумом в квантовой физике понимают низшее энергетическое состояние квантованного поля, обладающее нулевыми импульсом, моментом импульса и другими квантовыми числами. По сути, это очередное возвращение, пусть и на новом уровне, к идее наличия некой нематериальной подосновы, отвечающей за наблюдаемые процессы в материальном мире. Однако современная физика вновь пришла к некому современному «эфиру» под названием «физический вакуум».

Полевая физика не использует ни понятие «физический вакуум», ни понятие «эфир». В ней возникли представления о полевой среде – своеобразном расширении понятия физического поля. Отчасти полевая среда наследует идеи эфира как посредника физических взаимодействий, однако устраняет все связанные с ним противоречия. С другой стороны, поведение полевой среды отчасти напоминает физический вакуум. В ней могут существовать два типа возмущений. Первый из них обусловлен движением частиц и приводит в основном к классическому поведению. Второй связан с собственными процессами и возмущениями в полевой среде, что приводит, как правило, к квантовому поведению. В какой-то степени это напоминает нулевые колебания физического вакуума, на которые уже накладываются движения частиц.

Если же обратить внимание на более позднюю эпоху, то понятие полевой среды очень близко к понятию эфира, с той лишь разницей, что эфир рассматривался как абсолютная неподвижная субстанция, а полевая среда, напротив, как динамичная сущность, т.е. полевая среда в каком-то смысле – это относительный, а не абсолютный эфир.

Следующим шагом в развитии релятивистской теории тяготения является созданная Эйнштейном общая теория относительности. В основе общей теории относительности лежат следующие гипотезы.

I. Пространство общей теории относительности должно представлять собой псевдориманово четырехмерное пространство с метрикой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta ,$$

где ds – расстояние;

$g_{\alpha\beta}$ – метрические тензоры;

dx^α, dx^β – дифференциалы от криволинейных координат; индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

II. Вторая гипотеза общей теории относительности состоит в следующем. Тензор энергии-импульса T_{ij} накладывается на пространство событий в качестве дополнительной конструкции, при этом принимается, что тензор энергии-импульса вытекает из самой псевдоримановой геометрии этого пространства и определяется формулой

$$-\chi T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} ,$$

которая является уравнением поля,

где χ – некоторая положительная постоянная;

T_{ij} – тензор энергии-импульса;

R_{ij} – тензор Риччи;

R – скалярная кривизна в псевдоримановом пространстве событий [16].

Уравнения поля определяются 10 нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка гиперболического вида. Они определяют 10 неизвестных функций: 6 компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ (4 компоненты остаются произвольными), три составляющие пространственной скорости v^i вещества и плотности масс ρ.

Чтобы получить решение в какой-нибудь координатной системе, необходимо добавить к уравнениям поля четыре не тензорных уравнения, которые обуславливают выбор координат. В задачах релятивистской небесной механики преимущественно используются гармонические координаты, определяемые уравнениями

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^{\beta}}=0\,,$$

где g означает определитель, составленный из компонент метрического тензора.

Общая теория относительности, как и механика Ньютона, не свободна от недостатков. Важнейшим из них является вопрос о природе гравитации. В рамках общей теории относительности так же, как и в теории Ньютона, гравитация рассматривается чисто феноменологически. Другим недостатком общей теории относительности является существенное усложнение дифференциальных уравнений в задаче n тел. Решение этой задачи приходится искать в виде рядов по степеням малых параметров, при этом учитываются лишь начальные члены разложения и совершенно не исследуется вопрос о сходимости рядов. Основным недостатком как ньютоновой динамики, так и теории тяготения Эйнштейна является, по мнению авторов, наделение массы свойством, порождающим поле тяготения. В первом случае предполагается, что масса обладает свойством притяжения других материальных тел, во втором случае масса наделяется свойством искривлять окружающее пространство.

Как отмечалось ранее А. Пуанкаре, масса и сила – это неопределяемые понятия, подобно неопределяемым понятиям в математике – точка, линия. В механике Ньютона и Эйнштейна этим понятиям предают определенные физические свойства, что, по меньшей мере, является необоснованным.

Все вышеперечисленные недостатки как ньютоновой динамики, так и общей теории относительности отражаются на степени точности и достоверности проводимых исследований на их основе.

ГЛАВА 1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

На основании закона всемирного тяготения и трех законов движения получены дифференциальные уравнения движения в задаче n тел в прямоугольных координатах с началом в центре масс всей системы n материальных точек, которые имеют следующий вид [76, 82]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = \sum\limits_i k^2 m_i \left(\dfrac{X_i - X}{\Delta_i^3} \right), \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} = \sum\limits_i k^2 m_i \left(\dfrac{Y_i - Y}{\Delta_i^3} \right), \\ \dfrac{d^2Z}{dt^2} = \sum\limits_i k^2 m_i \left(\dfrac{Z_i - Z}{\Delta_i^3} \right), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\Delta_i^2 = \left(X_i - X\right)^2 + \left(Y_i - Y\right)^2 + \left(Z_i - Z\right)^2$.

В уравнениях (1.1) через X, Y, Z обозначены барицентрические координаты возмущаемого тела, а через m_i, X_i, Y_i, Z_i – массы и барицентрические координаты возмущающих тел, k – постоянная Гаусса.

Дифференциальные уравнения движения небесного тела в гелиоцентрической системе координат с учетом релятивистских эффектов от Солнца имеют более сложный вид по сравнению с уравнениями (1.1) [16]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{X}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \\ + \frac{k^2}{c^2}\left[(4-2\alpha)\frac{k^2}{r^4} X - (1+\alpha)\frac{\dot{r}^2}{r^3} X + \right. \\ \left. + 3\alpha \frac{\left(X\dot{X}\right)^2}{r^5} X + (4-2\alpha)\frac{\left(X\dot{X}\right)}{r^3}\dot{X} \right], \end{aligned} \tag{1.2}$$

где X – матрица-столбец с элементами x, y, z;

X_i – матрица столбец с элементами x_i, y_i, z_i;

m, x, y, z – масса и гелиоцентрические координаты возмущаемого тела;

m_i, x_i, y_i, z_i – массы и гелиоцентрические координаты больших планет;

r, Δ_i, r_i – расстояния, вычисляемые по формулам: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\Delta^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$,

$\dot{X}$ – матрица-столбец с элементами $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$,

k – постоянная Гаусса,

c – скорость света,

α – параметр, характеризующий выбор системы координат. Случай $\alpha = 1$ соответствует стандартным координатам, $\alpha = 0$ – гармоническим координатам.

Дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат с учетом ньютоновых и шварцшильдовских членов, обусловленных взаимным влиянием Солнца и планет, используемые для создания банка данных DE405, имеют следующий вид [102]:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (\mathrm{r}_j - \mathrm{r}_i)}{r_{ij}^3} \Bigg\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \\
+ \gamma \left(\frac{\upsilon_i}{c} \right)^2 + (1 + \gamma) \left(\frac{\upsilon_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{\mathrm{r}}_i \cdot \dot{\mathrm{r}}_j - \\
- \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(\mathrm{r}_i - \mathrm{r}_j) \cdot \dot{\mathrm{r}}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathrm{r}_j - \mathrm{r}_i) \cdot \ddot{\mathrm{r}}_j \Bigg\} + \\
+ \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \{ [(\mathrm{r}_i - \mathrm{r}_j)] \times [(2 + 2\gamma)\dot{\mathrm{r}}_i - (1 + 2\gamma)\dot{\mathrm{r}}_j] \} (\dot{\mathrm{r}}_i - \dot{\mathrm{r}}_j) + \\
+ \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{\mathrm{r}}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^{N} \frac{\mu_m (\mathrm{r}_m - \mathrm{r}_i)}{r_{im}^3},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где r_i, $\dot{\mathrm{r}}_i$, $\ddot{\mathrm{r}}_i$ – координаты, скорости, ускорения в барицентрической системе координат i-того тела;

$\mu_j = k^2 m_j$, где k^2 – гравитационная постоянная и m_j – масса j-го тела;

$r_{ij} = |\mathrm{r}_j - \mathrm{r}_i|$,

β и γ – релятивистские параметры; $\beta = \gamma = 1$; $\upsilon_i = |\dot{\mathrm{r}}_i|$; c – скорость света.

При создании точных эфемерид Луны, кроме гравитационных и релятивистских эффектов, необходимо учитывать влияние фигур Земли и Луны в математической модели. Ускорение Луны, благодаря учету зональных и тессеральных гармоник, в координатной системе $\xi\eta\zeta$ (рис. 1.1) имеет вид [102]

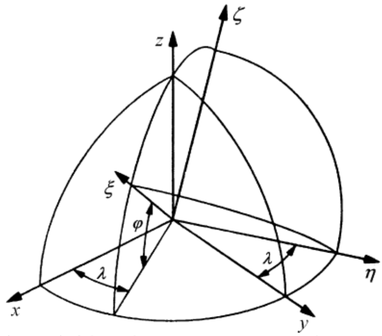

Рис. 1.1. Система координат $\xi\eta\zeta$, для которой рассчитываются ускорения от несферического тела

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{n_1} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \begin{bmatrix} (n+1)P_n(\sin\varphi) \\ 0 \\ -\cos\theta\, P_n'(\sin\varphi) \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^{n} \begin{bmatrix} -(n+1)P_n^m(\sin\varphi)[C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda] \\ m\sec\varphi\, P_n^m(\sin\varphi)[-C_{nm}\sin m\lambda + S_{nm}\cos m\lambda] \\ \cos\varphi P_n'^m(\sin\varphi)[C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda] \end{bmatrix} \right\}, \tag{1.4}$$

где μ – гравитационная постоянная;

r – расстояние между центрами масс двух тел;

n_1 и n_2 – максимальные степени зональных и тессеральных гармоник несферичных тел соответственно;

$P_n(\sin\varphi)$ – полином Лежандра степени n;

$P_n^m(\sin\varphi)$ – присоединенный полином Лежандра степени n и порядка m;

J_n – зональные гармоники от несферичности тела;

C_{nm}, S_{nm} – коэффициенты тессеральных гармоник;

φ – широта притягиваемого тела в фиксированной системе координат;

λ – восточная долгота притягиваемого тела.

Вклад в инерциальное ускорение от несферичного тела возникает от взаимодействия собственной фигуры Луны с внешней точечной массой, представленной в координатной системе $\xi\eta\zeta$, где ось ξ направлена вовне от несферичного тела к точечной массе, ось η направлена на восток (лежит в селенографической плоскости *XY*, перпендикулярна оси ξ), и, наконец, ось ζ направлена на север, образуя правую систему координат.

Кроме того, земные приливы оказывают на геоцентрическое ускорение Луны следующее воздействие [102]:

$$\ddot{\mathrm{r}}_m = -\frac{3k_2\mu_m}{r_{lm}^3}\left(1+\frac{\mu_m}{\mu_l}\right)\left(\frac{a_l}{r_{lm}}\right)^5\begin{bmatrix} x+y\delta \\ y-x\delta \\ z \end{bmatrix},$$

где k_2 – число Лява;

a_l – радиус Земли;

r_{lm} – геоцентрическое расстояние Луны;

x, y, z – декартовые геоцентрические координаты Луны;

μ_m – гравитационная постоянная, умноженная на массу Луны;

μ_l – гравитационная постоянная, умноженная на массу Земли;

δ – фазовый угол.

Объяснения причины гравитации между материальными телами свойством бесконечного пространства были высказаны Б. Риманом, а впоследствии Пуанкаре [68, 69]. Рассуждая о природе тяготения, Б. Риман пишет [69]: «Существующую в каждой точке пространства определенную по величине и направлению силу ускорения я пытаюсь объяснить движением некоей субстанции, наполняющей все бесконечное пространство. Эту субстанцию можно представить себе как физическое пространство, точки которого движутся в геометрическом пространстве.

На основании этого допущения все воздействия весомых тел на весомые тела передаются в пустом пространстве посредством названной субстанции. Таким образом, формы движения, лежащие в существе света и теплоты, посылаемых небесными телами, суть не что иное, как формы движения этой субстанции. Но названные явления, именно тяготение и распространение света сквозь пустое пространство, – единственные, которые должны были бы быть объяснены только движением этой субстанции».

А. Пуанкаре высказывает схожие суждения о причине тяготения. Говоря о тяготении, А. Пуанкаре пишет [68]: «В то время как в ньютоновой механике количество энергии движущегося тела зависит от инерции тела, находящегося в движении, здесь энергия зависит от того, что называют инерцией эфира по отношению к электромагнитным силам. Инерция эфира возрастает вместе со скоростью и становится бесконечно большой, когда скорость электрона приближается к скорости света. Таким образом, кажущаяся масса электрона возрастает со скоростью. При этом новом представлении постоянной массы материи не существует. Инерцией обладает не материя, а эфир; он один оказывает сопротивление движению, так что можно было бы сказать: нет материи, есть только дыры в эфире».

Таким образом, размышляя о природе тяготения, как Риман, так и Пуанкаре приходят к тому, что причину тяготения следует искать не в наличии массы в материальном теле, а в свойстве бесконечного пространства, которое у Римана называется движущейся субстанцией, а у Пуанкаре свойством эфира.

После успехов кинетической теории газов В. Томсон писал: «Хорошо известная кинетическая теория газов представляет собой столь важный шаг на пути к объяснению с помощью движения таких свойств тел, которые представляются нами статистическими, что едва ли можно удержаться от мысли, что в будущем появится полная теория материи, в которой все свойства последней будут рассматриваться лишь как атрибуты движения» [18].

Дальнейшие исследования будут посвящены созданию математической модели, где первопричиной гравитации считается взаимодействие движущейся материи с окружающей средой.

1.1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ, ОСНОВАННЫХ НА НОВОМ ПРИНЦИПЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Возникает естественный вопрос: не является ли проявление гравитации следствием взаимодействия движущейся материи с окружающим пространством?

На основании построения простейшей модели, описывающей гравитацию как атрибут взаимодействия движущейся материи с окружающимся пространством, в дальнейшем будут получены дифференциальные уравнения движения n материальных тел в барицентрической системе координат. Для вывода этих уравнений допускаются ряд упрощений: материальные тела имеют сферическую форму с равномерно распределенной плотностью, пространство обладает свойством сжатия при изменении пространственной плотности.

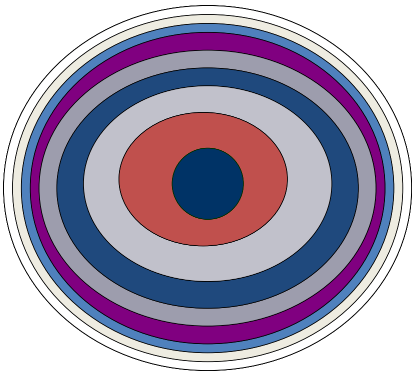

Рис. 1.2. Сжатие пространства

Вывод дифференциальных уравнений движения основан на следующей идее. В каждый фиксированный момент времени материальное тело занимает в пространстве определенный объем. При перемещении тела пространство, занимаемое им в предыдущий момент времени, освобождается. При этом освободившееся пространство заполняется окружающей его средой, тем самым происходит сжатие окружающего пространства на величину объема, освобожденного движущемся объектом. Таким образом, пространство сжимается, заполняя пустоты, образованные движущимися материальными телами (см. рис. 1.2).

В дальнейшем займемся выявлением закона, по которому изменяются взаимные расстояния между концентрическими сферами.

Различные материальные тела занимают в пространстве определенные объемы. Однако вытесняемый ими объем, как правило, не равен фактическому объему и находится в прямой зависимости от плотности материального тела, т.е. для всякого материального тела существует предельная плотность, для которой можно рассчитать вытесняемый этим телом объем. Для сферически симметричных тел этот объем можно вычислить по формуле

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 ,$$

где r_0 назовем эффективным радиусом материального тела, который равен радиусу этого тела, сжатого до предельной плотности.

На произвольном расстоянии r от центра материального тела пространство будет сжиматься на величину объема, равного

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 , \qquad (1.5)$$

или, сокращая соотношение (1.5) на постоянный множитель $\frac{4}{3}\pi$, получим

$$r^3 - r_1^3 = r_0^3 , \qquad (1.6)$$

где r_1 – неизвестное расстояние, подлежащее определению.

Из соотношений (1.5) и (1.6) следует, что величина объема, заключенного между сферическими радиусами r и r_1, равна объему материального тела с эффективным радиусом r_0 .

Из выражения (1.6) найдем r_1 по формуле

$$r_1 = \sqrt[3]{r^3 - r_0^3} . \qquad (1.7)$$

Из соотношения (1.6) находим величину сжатия на произвольном расстоянии r :

$$r - r_1 = \frac{r_0^3}{r^2 + r r_1 + r_1^2} . \qquad (1.8)$$

Из соотношения (1.8) следует, что величина сжатия пространства на расстоянии r от центра материального тела при $r_1 = 0$ обратно пропорциональна квадрату этого расстояния.

С учетом (1.6) выражение (1.7) запишем в виде

$$r - r_1 = \frac{r_0^3}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_0^3} + \sqrt[3]{\left(r^3 - r_0^3\right)^2}} . \qquad (1.9)$$

На поверхности материального тела $r_1 = 0$, поэтому радиус-вектор изменяется согласно формуле (1.8):

$$r = \frac{r_0^3}{r^2}. \tag{1.10}$$

Из формулы (1.10) следует, что изменение радиус-вектора происходит неравномерно, обратно пропорционально квадрату этого расстояния, т. е.

$$\frac{r_0^3}{r^2} = \frac{a(r)t^2}{2}. \tag{1.11}$$

Если разбить величину радиус-вектора r на участки таким образом, что сжатие пространства для каждого из участков будет происходить за одинаковое время, то с учетом (1.11) полагаем

$$a(r) = \frac{\mu}{r^2}, \tag{1.12}$$

где $\mu = r_0^2 a_0(r_0)$.

Определим теперь T_0 – время сжатия пространства от $r = r_0$ до $r = 0$. Для нахождения T_0 используем соотношение

$$\frac{dr}{dt} = a(r)t. \tag{1.13}$$

Представим выражение (1.13) в виде

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mu \cdot t}{r^2}. \tag{1.14}$$

Разделяя переменные, уравнение (1.14) запишем в виде

$$r^2 dr = \mu \cdot t dt. \tag{1.15}$$

Интегрируя уравнение (1.15)

$$\int_0^{r_0} r^2 dr = \mu \int_0^{T_0} t dt, \tag{1.16}$$

получим

$$\frac{r_0^3}{3} = \frac{\mu T_0^{\,2}}{2}. \tag{1.17}$$

Выразив T_0 из (1.17), находим

$$T_0^2 = \frac{2r_0^3}{3\mu}. \tag{1.18}$$

Полагая, что время сжатия пространства от $r = r_0$ до $r = 0$ и от произвольного расстояния от центра материального тела r до $r = r_1$ одинаковым, из выражения (1.9) получим

$$\frac{r_0^3}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_0^3} + \sqrt[3]{\left(r^3 - r_0^3\right)^2}} = \frac{a(r)T_0^2}{2}. \tag{1.19}$$

Из выражений (1.18) и (1.19) находим

$$a(r) = \frac{3\mu}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_0^3} + \sqrt[3]{\left(r^3 - r_0^3\right)^2}}. \tag{1.20}$$

Таким образом, получено соотношение для нахождения ускорения на произвольном расстоянии от сферически симметричного с равномерно распределенной плотностью материального тела. Следует отметить, что при $r_0 \to 0$, а также для $r >> r_0$, $a(r) \approx \dfrac{\mu}{r^2}$, т.е. ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния от центра материального тела. В общем случае, как следует из формулы (1.20), величина ускорения не является обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра материального тела.

Дифференциальные уравнения движения в классической ньютоновой задаче n тел в прямоугольных координатах с началом в центре масс всей системы n материальных точек представлено в виде (1.1).

Для получения дифференциальных уравнений движения, основанного на новом принципе взаимодействия в барицентрической системе координат, достаточно умножить ускорение возмущаемого тела на направляющие косинусы данного ускорения.

С учетом (1.20), полагая $r = \Delta$, дифференциальные уравнения движения возмущаемого тела в барицентрической системе координат примут следующий вид [40, 47]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} = \sum\limits_i \left(\dfrac{X_i - X}{\Delta_i}\right) \dfrac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i\sqrt[3]{\left(\Delta_i^3 - r_{0i}^3\right)} + \sqrt[3]{\left(\Delta_i^3 - r_{0i}^3\right)^2}}, \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} = \sum\limits_i \left(\dfrac{Y_i - Y}{\Delta_i}\right) \dfrac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i\sqrt[3]{\left(\Delta_i^3 - r_{0i}^3\right)} + \sqrt[3]{\left(\Delta_i^3 - r_{0i}^3\right)^2}}, \\ \dfrac{d^2Z}{dt^2} = \sum\limits_i \left(\dfrac{Z_i - Z}{\Delta_i}\right) \dfrac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i\sqrt[3]{\left(\Delta_i^3 - r_{0i}^3\right)} + \sqrt[3]{\left(\Delta_j^3 - r_{0j}^3\right)^2}}, \end{cases} \tag{1.21}$$

где r_{0i} – эффективный радиус i-того тела;

a_{0i} – соответствующее ускорение для i-того тела на расстоянии r_{0i} от центра массы;

X, Y, Z – барицентрические координаты возмущаемого тела;

X_i, Y_i, Z_i – барицентрические координаты возмущающих тел.

Сопоставим дифференциальные уравнения движения (1.1) и (1.21). Эти уравнения имеют как общие свойства, так и существенные различия. Как следует из уравнений (1.21), закон изменения ускорения отличен от закона обратной пропорциональности квадрату расстояния от произвольной точки до центра материального тела. Однако вследствие того, что размеры материальных тел существенно меньше расстояний между телами, для большинства материальных тел отклонения ускорений от закона обратной пропорциональности квадрату расстояний между ними оказывается незначительным.

Наиболее существенные различия дифференциальных уравнений (1.1) и (1.21) заключаются в предпосылках, на основе которых эти уравнения получены. В основе вывода уравнений (1.1) лежит закон всемирного тяготения и три аксиомы движения. Вывод уравнений (1.21) основан на более простых и естественных предположениях. В основе вывода уравнений (1.21) лежит принцип сжатия окружающего пространства относительно движущегося материального тела.

Сравним константы, входящие в уравнения (1.1) и (1.21). Постоянными в уравнениях (1.1) являются $k^2 m_i$, где $k = \dfrac{2\pi a^{3/2}}{T\sqrt{1+m}}$ – постоянная Гаусса; m – масса Земли и Луны; m_i – массы возмущающих тел; T – продолжительность сидерического года в средних солнечных сутках. Постоянными в уравнениях (1.21) являются $a_{0i} r_{0i}^2$, где r_{0i} – радиусы возмущающих тел; a_{0i} – ускорения на поверхности каждого возмущающего тела.

Таким образом, для нахождения констант, входящих в уравнение (1.1), требуется определить 5 величин для каждого уравнения, значения которых не могут быть найдены путем прямых измерений. В то время как для нахождения констант, входящих в уравнения (1.21), для каждого тела требуется найти две величины: r_{0i} – радиусы возмущающих тел; a_{0i} – ускорения на поверхности каждого возмущающего тела, значения которых могут быть найдены путем прямых измерений. Следует отметить, что размерности постоянных, входящих в уравнения (1.1) и (1.21), совпадают. В системе СГС $k^2 m_i$ и $a_{0i} r_{0i}^2$ имеют размерность $\text{см}^3/\text{сек}^2$, т.е. изменение объема в единицу времени является постоянной величиной. Как раз этот принцип лежит в основе при выводе уравнений (1.21). Если эту гипотезу взять в качестве основной, возникает вопрос: какие из основных принципов ньютоновой небесной механики необходимо сохранить, а какие отвергнуть? Рассматриваемая модель движения небесных тел не нуждается в законе всемирного тяготения и трех законах движения. Излишними оказываются четыре определения, связанные с понятиями массы, количества движения и силы.

Понятия времени, пространства и движения, сформулированные в пунктах I-IV, остаются в силе при практическом использовании новой модели, описывающей движение небесных тел. Следует пояснить необходимость использования данных определений.

Рассуждая о принципах классической механики, А. Пуанкаре задает вопрос: является ли механика наукой экспериментальной или наукой более или менее дедуктивной и априорной? Отвечая на него, А. Пуанкаре пишет: «Трудность решения этих естественно возникающих вопросов происходит главным образом оттого, что руководства по механике не вполне ясно различают, где опыт, где математическое суждение, где условное соглашение, где гипотеза» [68].

Дифференциальные уравнения (1.1), (1.21) описывают движение материальных тел в барицентрической системе координат. Уравнения (1.1) – обычные дифференциальные уравнения движения в ньютоновой форме. Вывод дифференциальных уравнений (1.21) основан на новом принципе взаимодействия материальных тел, в которых материальные тела имеют определенные размеры, отсутствует явно понятие массы и силы. Понятие ускорения определяется через закон изменения величины радиус-вектора при сжатии пространства в процессе движения материального тела. При $r_{0i} \to 0$, т.е. при замене материальных тел конечных размеров материальными телами с бесконечно малыми линейными размерами, уравнения (1.21) по форме обращаются в уравнения (1.1).

Дифференциальные уравнения (1.21) имеют более сложный вид по сравнению с уравнениями (1.1). Однако они значительно проще дифференциальных уравнений движения, учитывающих релятивистские эффекты [16, 102].

Под эффективным радиусом материального тела будем понимать такой радиус сферы, которому соответствует сжатие пространства на величину фактического объема. Из физических соображений ясно, что тела различной плотности и одинакового размера не могут иметь равные эффективные радиусы. Их значения можно определить путем согласования решения уравнений (1.21) с наблюдениями.

Следует отметить, что система дифференциальных уравнений (1.21) не содержит явно масс тел и силовых взаимодействий. Дифференциальные уравнения (1.21) сохраняют принцип дальнодействия, так как в уравнениях (1.21) отсутствуют силовые взаимодействия между телами и процесс сжатия пространства относительно всех материальных тел происходит одновременно.

Вследствие того, что уравнения (1.21) справедливы для материальных тел, имеющих определенные конечные размеры, то в процессе движения взаимные расстояния между ними не могут обратиться в нуль. Следовательно, для материальных тел конечных размеров уравнения (1.21) не являются сингулярными.

1.2. ВЛИЯНИЕ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ ЛУНЫ

Ранее нами был рассмотрен вывод дифференциальных уравнений движения (1.21) для сферически симметричных тел. Аналогичную идею можно распространить при выводе дифференциальных уравнений на тела, имеющие произвольную форму. При выводе дифференциальных уравнений материального тела необходимо знать его объем. Для тел, имеющих форму эллипсоида вращения, этот объем можно вычислить по формуле

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi a_0^{\,2} b_0 ,$$

где a_0 и b_0 – большая и малая полуоси эллипсоида.

Предполагается, что на произвольном расстоянии r от центра материального тела пространство будет сжиматься на величину объема, равного

$$\frac{4}{3}\pi\, a^2 b - \frac{4}{3}\pi\, a_1^2 b_1 = \frac{4}{3}\pi\, a_0^2 b_0 \qquad (1.22)$$

или, сокращая соотношение (1.22) на постоянный множитель $\frac{4}{3}\pi$, получим

$$a^2 b - a_1^2 b_1 = a_0^2 b_0 , \qquad (1.23)$$

где a_1 и b_1 – неизвестные большая и малая полуоси эллипсоида, подлежащие определению. При этом считаем, что эллипсоиды с полуосями a_0, b_0 и a_1, b_1 вложены в эллипсоид с полуосями a, b. Полагаем

$$\frac{b}{a} = \alpha\ ;\ \frac{b_1}{a_1} = \alpha_1\ ;\ \frac{b_0}{a_0} = \alpha_0\,. \tag{1.24}$$

Принимая во внимание выражение (1.24), соотношение (1.23) можно записать в виде

$$a^3\alpha - a_1^3\alpha_1 = a_0^3\alpha_0\,. \tag{1.25}$$

Выразим большую полуось a через расстояние r, где r – расстояние от центра возмущающей планеты до произвольной точки, лежащей на поверхности эллипсоида. Координаты конца радиус-вектора $\bar{r}$ – x, y, z – определяются по формулам [22]:

$$\begin{cases} x = N\cos B\cos L, \\ y = N\cos B\sin L, \\ z = \left(b^2/a^2\right)N\sin B, \end{cases} \tag{1.26}$$

где B – геодезическая широта,

L – геодезическая долгота,

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2 B + b^2\sin^2 B}}\,.$$

По формулам (1.26) определим величину радиус-вектора r:

$$r^2 = a^2\,\frac{\cos^2 B + \alpha^4\sin^2 B}{\cos^2 B + \alpha^2\sin^2 B}\,. \tag{1.27}$$

Из (1.26) найдем зависимость расстояния от малой полуоси эллипса:

$$r^2 = b^2\,\frac{\cos^2 B + \alpha^4\sin^2 B}{\alpha^2\cos^2 B + \alpha^4\sin^2 B}\,. \tag{1.28}$$

Из выражений (1.27) и (1.28) найдем a^2b по формуле

$$a^2b = r^3\,\frac{\cos^2 B + \alpha^2\sin^2 B}{\cos^2 B + \alpha^4\sin^2 B}\sqrt{\frac{\alpha^2\cos^2 B + \alpha^4\sin^2 B}{\alpha^2\cos^2 B + \alpha^4\sin^2 B}}\,. \tag{1.29}$$

Аналогично определяем $a_0^2b_0$ и $a_1^2b_1$:

$$a_0{}^2b_0 = r_0{}^3\,\frac{\cos^2 B + \alpha_0{}^2\sin^2 B}{\cos^2 B + \alpha_0{}^4\sin^2 B}\sqrt{\frac{\alpha_0{}^2\cos^2 B + \alpha_0{}^4\sin^2 B}{\alpha_0{}^2\cos^2 B + \alpha_0{}^4\sin^2 B}}\,, \tag{1.30}$$

$$a_1{}^2b_1 = r_1{}^3\,\frac{\cos^2 B + \alpha_1{}^2\sin^2 B}{\cos^2 B + \alpha_1{}^4\sin^2 B}\sqrt{\frac{\alpha_1{}^2\cos^2 B + \alpha_1{}^4\sin^2 B}{\alpha_1{}^2\cos^2 B + \alpha_1{}^4\sin^2 B}}\,. \tag{1.31}$$

Полагая, что концентрические эллипсоиды с полуосями a_0, b_0; a_1, b_1 и a, b подобны, получим:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha . \tag{1.32}$$

Из равенства (1.32) следует, что соотношение (1.25) имеет в вид

$$r^3 - r_1^3 = r_0^3 . \tag{1.33}$$

Из выражения (1.33) найдем r_1 по формуле

$$r_1 = \sqrt[3]{r^3 - r_0^3} . \tag{1.34}$$

Из соотношения (1.34) находим величину сжатия на произвольном расстоянии r:

$$r - r_1 = \frac{r_0^3}{r^2 + rr_1 + r_1^2} . \tag{1.35}$$

Из выражения (1.35) следует, что величина сжатия пространства на расстоянии r от центра материального тела при $r_1 = 0$ обратно пропорциональна квадрату этого расстояния.

С учетом (1.34) выражение (1.35) запишем в виде

$$r - r_1 = \frac{r_0^3}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_0^3} + \sqrt[3]{\left(r^3 - r_0^3\right)^2}} . \tag{1.36}$$

Таким образом, формула (1.36) представляет собой закон сжатия пространства на величину $r - r_1$ при перемещении материального тела, имеющего форму эллипсоида вращения. Данная формула имеет одинаковый вид с формулой, определяющей сжатие пространства, если материальное тело имеет форму сфероида. Это свойство позволяет упростить оценку влияния несферичности материального тела на сжатие пространства на произвольном расстоянии от данного тела.

Следует напомнить, что в формулах (1.21) значения радиусов взаимодействующих тел сжимаются на величину, которая соответствует предельной плотности взаимодействующих тел. Радиусы Солнца и внешних планет при этом уменьшаются в 2,3 раза, а радиусы внутренних планет – в 2 раза. После сжатия небесные тела могут принять произвольную форму. Предположим, что Земля, имеющая форму эллипсоида вращения, после сжатия примет сферическую форму или форму эллипсоида вращения, подобную эллипсоиду Земли. Проведенные исследования, о которых речь пойдет далее, показали, что в этом случае уравнения (1.21) будут также применимы для исследования движения Луны на интервале времени с 1600 по 2200 гг.